

**IV. ORSZÁGOS MAGYAR MATEMATIKAOLIMPIA
XXXI. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY***

Kolozsvár, 2022. április 20–23.

I. forduló

IX. osztály

1. Határozd meg azokat az x, y, z és t valós számokat, amelyekre

$$2x^2 + 5y^2 + 4z^2 + t^2 - 6xy - 2yz - 2zt - 2t + 2 = 0.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

2. Igazold, hogy ha $a, b, c > 0$ és $abc = 1$, akkor

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq 1.$$

3. Legyen G az ABC általános háromszög súlypontja, B' és C' pedig rendre a B és a C csúcsból kiinduló szögfelező talppontja. Igazold, hogy ha a B', G és C' pontok kollineárisak, akkor $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$.

4. Adott az $ABCD$ négyzet. Felvesszük az E pontot az AC szakaszon, valamint az F pontot az AC egyenesen a négyzet külső tartományában úgy, hogy $AE = CF = AB$. Legyen a BE egyenes és a DC szakasz metszéspontja M , a BE egyenes és az AD egyenes metszéspontja N , valamint a CN egyenes és a DF egyenes metszéspontja P . Igazold, hogy az A, M és P pontok kollineárisak.

Megoldások

1. Az egyenlőség mindkét oldalát beszorozzuk 2-vel, majd csoportosítva a tagokat teljes négyzeteket alakítunk ki: $4x^2 + 10y^2 + 8z^2 + 2t^2 - 12xy - 4yz - 4zt - 4t + 4 = 0 \iff$

$$\iff (4x^2 - 12xy + 9y^2) + (y^2 - 4yz + 4z^2) + (4z^2 - 4zt + t^2) + (t^2 - 4t + 4) = 0 \iff$$

$$\iff (2x - 3y)^2 + (y - 2z)^2 + (2z - t)^2 + (t - 2)^2 = 0.$$

A teljes négyzetek összege akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha minden tag nulla, vagyis $(2x - 3y)^2 = 0$, $(y - 2z)^2 = 0$, $(2z - t)^2 = 0$ és $(t - 2)^2 = 0$, innen pedig $2x = 3y$, $y = 2z$, $2z = t$ és $t = 2$.

Ezért $t = 2$, $z = 1$, $y = 2$ és $x = 3$ az egyetlen valós számokból álló megoldás.

2. Mivel $a^2 + b^2 \geq 2ab$, ezért $a^3 + b^3 + 1 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) + abc \geq (a + b)ab + abc = (a + b + c)ab = \frac{a+b+c}{c}$. Következik, hogy $\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} \leq \frac{c}{a + b + c}$. Hasonlóan $\frac{1}{b^3 + c^3 + 1} \leq \frac{a}{a + b + c}$ és $\frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq \frac{b}{a + b + c}$.

*Folytatás lapunk 2022/5-6. számából.

A kapott három egyenlőtlenséget összegezve kapjuk, hogy

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq \frac{a + b + c}{a + b + c} = 1.$$

3. Első megoldás.

Legyen $AB = c$, $AC = b$ és $BC = a$. Az ABC háromszögben a CC' -re felírt szögfelezőtétel alapján $\frac{AC'}{C'B} = \frac{b}{a}$, innen $\frac{AC'}{AB} = \frac{b}{a+b}$, vagyis $\vec{AC'} = \frac{b}{a+b} \vec{AB}$.

Hasonlóan a BB' -re felírt szögfelezőtétel alapján $\frac{AB'}{B'C} = \frac{c}{a}$, innen $\frac{AB'}{AC} = \frac{c}{a+c}$, vagyis $\vec{AB'} = \frac{c}{a+c} \vec{AC}$.

Legyen M a BC oldal felezőpontja, ekkor

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \text{ és } \vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}).$$

Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \vec{GC'} &= \vec{AC'} - \vec{AG} = \frac{b}{a+b} \vec{AB} - \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \\ &= \frac{2b-a}{3(a+b)} \vec{AB} - \frac{1}{3} \vec{AC}, \text{ és analóg módon} \end{aligned}$$

$$\vec{GB'} = -\frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{2c-a}{3(a+c)} \vec{AC}.$$

A B' , G és C' pontok akkor és csak akkor kollineárisak, ha a $\vec{GB'}$ és $\vec{GC'}$

$$\text{kollineáris, vagyis ha } \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2b-a}{3(a+b)}} = \frac{\frac{2c-a}{3(a+c)}}{-\frac{1}{3}} \iff \frac{a+b}{2b-a} = \frac{2c-a}{a+c} \iff$$

$$\iff (a+b)(a+c) = (2b-a)(2c-a) \iff a^2 + ac + ab + bc = 4bc - 2ab - 2ac + a^2 \iff$$

$$\iff 3ab + 3ac = 3bc.$$

Elosztva mindkét oldalt $3abc$ -vel kapjuk, hogy $\frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a}$, vagyis $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{BC}$.

Második megoldás. Az első megoldáshoz hasonlóan belátjuk, hogy

$$\vec{AC'} = \frac{b}{a+b} \vec{AB}, \quad \vec{AB'} = \frac{c}{a+c} \vec{AC} \text{ és } \vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}).$$

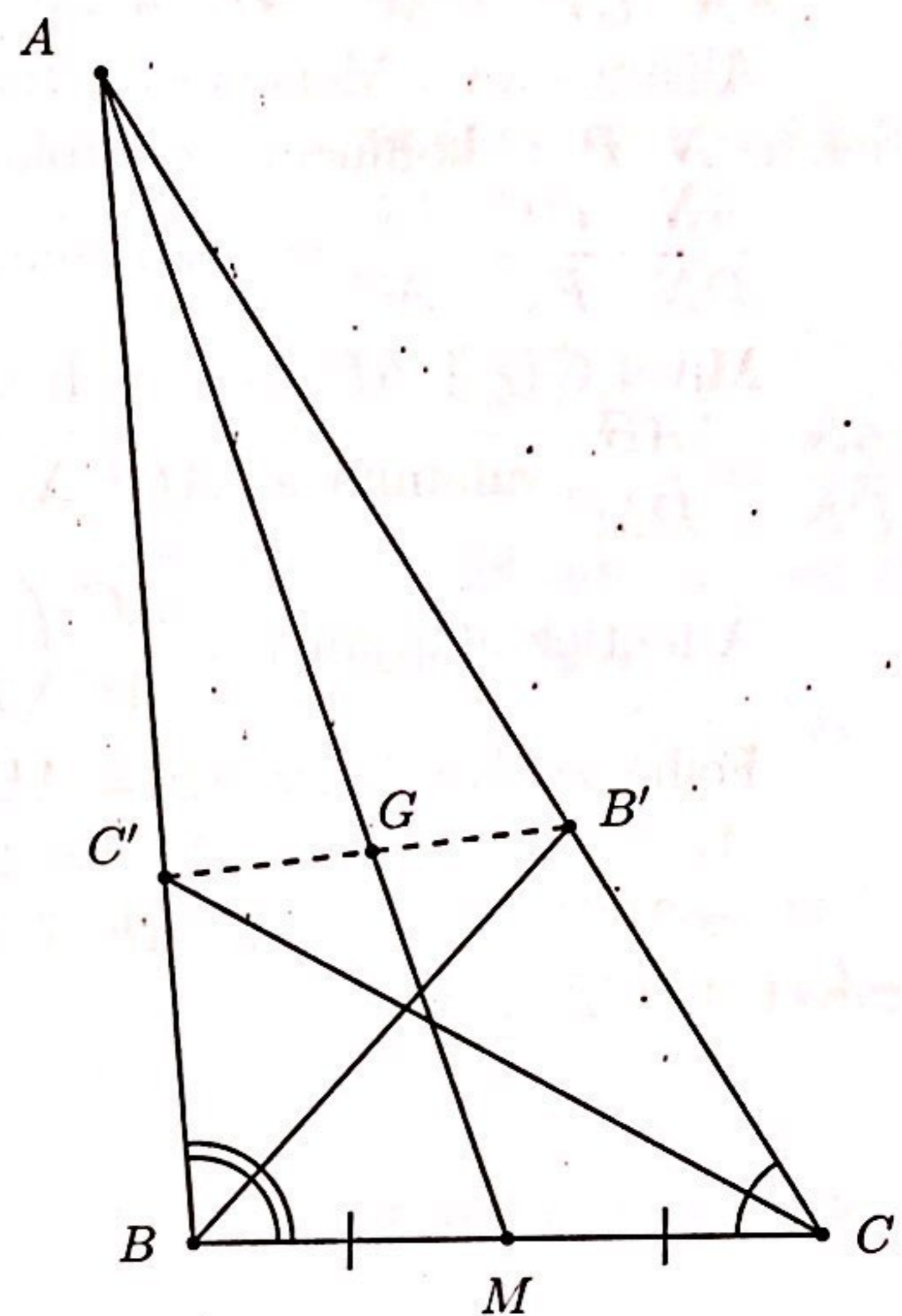
A B' , G és C' pontok akkor és csak akkor kollineárisak, ha létezik $k \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$\vec{AG} = k \vec{AB'} + (1-k) \vec{AC'}. \text{ Ez alapján } \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}) = k \cdot \frac{c}{a+c} \vec{AC} + (1-k) \cdot \frac{b}{a+b} \vec{AB}.$$

$$\text{Innen egyrészt } \frac{1}{3} = k \cdot \frac{c}{a+c}, \text{ ahonnan } 3k = \frac{a+c}{c} = 1 + \frac{a}{c}, \text{ másrészt } \frac{1}{3} = (1-k) \cdot \frac{b}{a+b},$$

$$\text{ahonnan } 3 - 3k = \frac{a+b}{b}, \text{ vagyis } 3k = \frac{2b-a}{b} = 2 - \frac{a}{b}.$$

$$\text{Az előzőek alapján } 1 + \frac{a}{c} = 2 - \frac{a}{b}, \text{ ahonnan } \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a}, \text{ vagyis } \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{BC}.$$



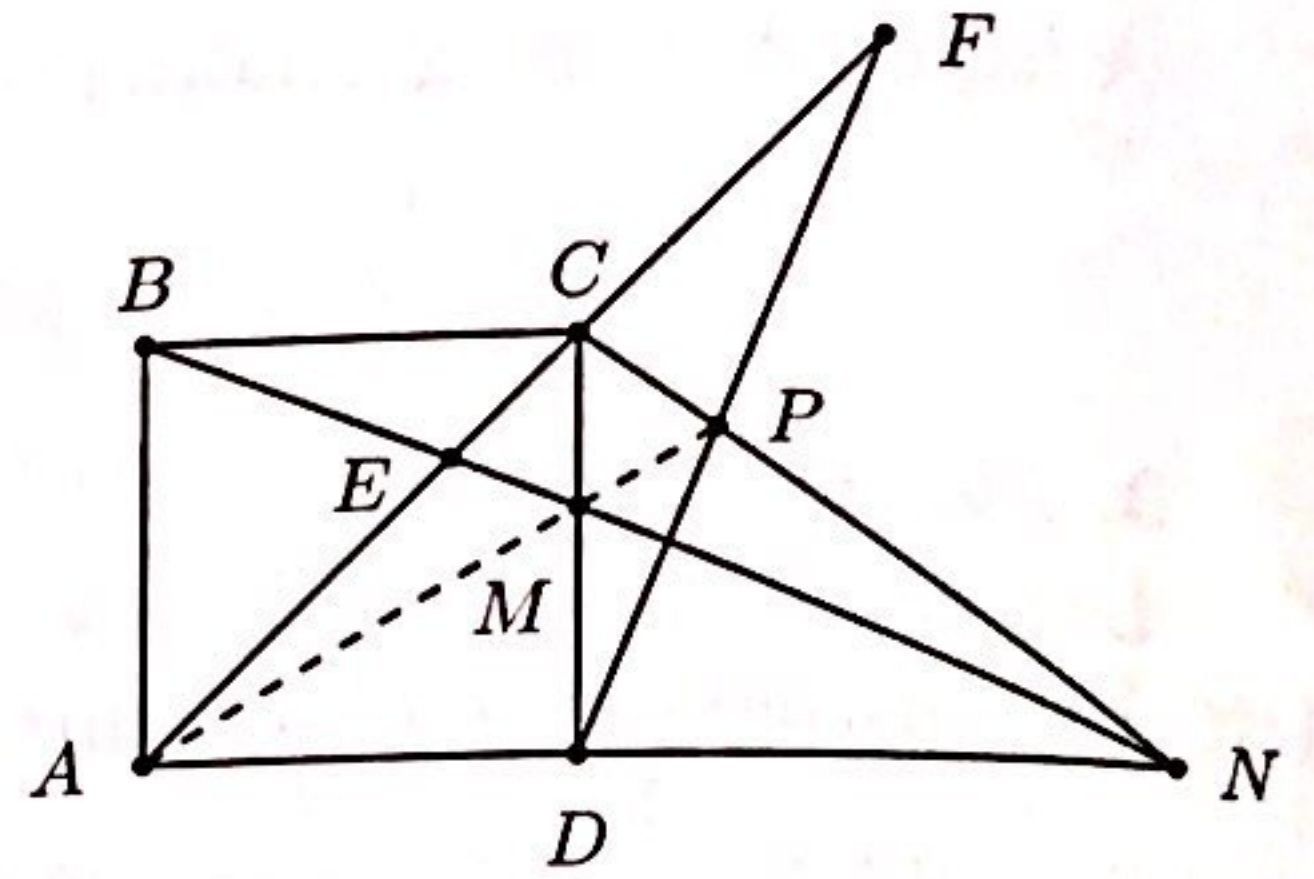
4. Az A , M és P pontok kollinearitása igazolható, ha alkalmazzuk Menelaosz tételének a fordított tételét DCF háromszögben az AP szelőre. Ehhez be kell látnunk, hogy $x = \frac{CA}{FA} \cdot \frac{FP}{DP} \cdot \frac{DM}{CM} = 1$.

Alkalmazva a Menelaosz-tételt a DAF háromszögben az N, P, C kollineáris pontokra kapjuk, hogy $\frac{AN}{DN} \cdot \frac{DP}{FP} \cdot \frac{FC}{AC} = 1$, ahonnan $\frac{FP}{DP} = \frac{AN}{DN} \cdot \frac{CF}{AC}$.

Mivel $CD \parallel AB$, ezért a hasonlóság alaptétele szerint az $ABN\Delta \sim DMN\Delta$, ahonnan $\frac{AN}{DN} = \frac{AB}{DM}$, valamint az $ABE\Delta \sim CME\Delta$, ahonnan $\frac{AB}{CM} = \frac{AE}{CE}$.

$$\text{A fentiek alapján } x = \frac{AC}{AF} \left(\frac{AN}{DN} \cdot \frac{CF}{AC} \right) \cdot \frac{DM}{CM} = \frac{CF}{AF} \cdot \frac{AB}{DM} \cdot \frac{DM}{CM} = \frac{CF}{AF} \cdot \frac{AE}{CE}.$$

Felhasználva, hogy $AB = AE = CF$, az $x = 1$ összefüggést rendre így írhatjuk: $AB^2 = AF \cdot CE \Leftrightarrow AB^2 = (2 \cdot AE + CE) \cdot CE = 2 \cdot AE \cdot CE + CE^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2AB^2 = AE^2 + 2 \cdot AE \cdot CE + CE^2 = (AE + CE)^2 = AC^2 \Leftrightarrow AB\sqrt{2} = AC$, ami igaz, mivel $ABCD$ négyzet.



X. osztály

1. Oldd meg a valós számok halmazán az $x^2 - 5x - 18 = 2(x - 3)\sqrt{x - 2}$ egyenletet!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

2. a) Tanulmányozd az $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x - 2^x$ függvény monotonitását!

b) Oldd meg a természetes számok halmazán a $3^{3^x} \cdot 2^{2^x} - 3^{2^x} \cdot 2^{3^x} = x \cdot 6^{2^x}$ egyenletet!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

3. A z_1, z_2, z_3 komplex számokra teljesülnek a következő összefüggések:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| \text{ és } z_1 + \sqrt{3}z_2 + 2z_3 = 0.$$

Igazold, hogy $(z_1 + z_0 \cdot z_2 + z_3)(z_1 + \bar{z}_0 \cdot z_2 + z_3) = 0$, ahol $z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$.

András Szilárd, Kolozsvár

4. Adott az $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x - 1}$ függvény. Az f_{n+1} függvényt a következőképpen értelmezzük: $f_1 = f$ és $f_{n+1} = f \circ f_n$, minden $n \geq 1$ esetén. Igazold, hogy az f_n értelmezett az $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ halmazon, bármilyen $n \in \mathbb{N}^*$ esetén és határozd meg az f_n függvényt!

Dávid Géza, Székelyudvarhely
Kaiser Dániel, Székelyudvarhely

Megoldások

1. Az egyenletben megjelenő kifejezések akkor értelmezettek, ha $x \in [2, +\infty)$. A következő ekvivalens átalakításokat végezhetjük el: $x^2 - 6x + 9 + x - 2 - 25 = 2(x - 3)\sqrt{x - 2} \Leftrightarrow (x - 3)^2 - 2(x - 3)\sqrt{x - 2} + x - 2 = 25 \Leftrightarrow (x - 3 - \sqrt{x - 2})^2 = 25$.

Két esetünk van: $x - 3 - \sqrt{x - 2} = -5$ vagy $x - 3 - \sqrt{x - 2} = 5$.

Az első esetben $x + 2 = \sqrt{x - 2} \iff x^2 + 4x + 4 = x - 2 \iff x^2 + 3x + 6 = 0$, ahol az egyenlet diszkriminánsa kisebb, mint nulla, ezért nincs valós megoldása.

A második esetben azt kapjuk, hogy $x - 8 = \sqrt{x - 2}$. Mivel $\sqrt{x - 2} \geq 0$, ezért $x - 8 \geq 0$, vagyis $x \geq 8$. Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve kapjuk, hogy $(x - 8)^2 = x - 2 \iff x^2 - 17x + 66 = 0$.

Az egyenletnek két valós gyöke van: $x_1 = 6$ és $x_2 = 11$. Az $x \geq 8$ feltétel miatt viszont csak a második gyök lesz az eredeti egyenletnek is a megoldása.

A megoldáshalmaz tehát $M = \{11\}$.

2. a) Az $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x - 2^x$ függvény átírható az $f(x) = 3^x \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x\right)$

alakba. Ha $0 \leq x_1 < x_2$, akkor $3^{x_1} < 3^{x_2}$ és $0 < \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} < \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} \leq 1$, következik, hogy $0 \leq 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} < 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2}$. Tehát $f(x_1) = 3^{x_1} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1}\right) < 3^{x_2} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2}\right) = f(x_2)$, vagyis az f függvény szigorúan növekvő.

b) Az egyenletet 6^x -nel elosztva a $3^{3^x - 2^x} - 2^{3^x - 2^x} = x$ vagyis az $f(f(x)) = x$ alakba írható.

Az f szigorúan növekvő, ezért ha $x < f(x)$ akkor $x < f(x) < f(f(x))$. Hasonlóan, ha $x > f(x)$ akkor $x > f(x) > f(f(x))$. Összefoglalva, x pontosan akkor megoldása az egyenletnek, ha $f(x) = x$, vagyis, ha $3^x - 2^x = x$.

Észrevesszük, hogy $x = 0$ és $x = 1$ megoldása az egyenletnek, és igazoljuk, hogy nincs több megoldás.

A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy ha $x \geq 2$, $x \in \mathbb{N}$, akkor $f(x) > x$.

Ha $x = 2$, akkor $f(2) = 3^2 - 2^2 = 5 > 2$.

Feltételezzük, hogy a kijelentés igaz $x = n$ esetén és igazoljuk az $x = n + 1$ esetben. Tudjuk, hogy az f függvény szigorúan növekvő ezért $f(n + 1) > f(n)$. Az $f(n + 1)$ és $f(n)$ természetes számok, vagyis az előző egyenlőtlenség alapján $f(n + 1) \geq f(n) + 1$. Az indukciós feltételt felhasználva azt kapjuk, hogy $f(n + 1) \geq f(n) + 1 > n + 1$, vagyis $f(x) > x$ bármilyen $x \geq 2$ természetes szám esetén.

Az egyenletnek tehát két megoldása van a természetes számok halmazán: a 0 és az 1.

Megjegyzés. Az $x \geq 2$ természetes számok esetén az $f(x) > x$ kijelentés indukcióval igazolható az f monotonitásának felhasználása nélkül. Egy ekvivalens formába való átalakítással az $3^x > 2^x + x$ egyenlőtlenséget fogjuk igazolni, ami $x = 2$ esetén igaz.

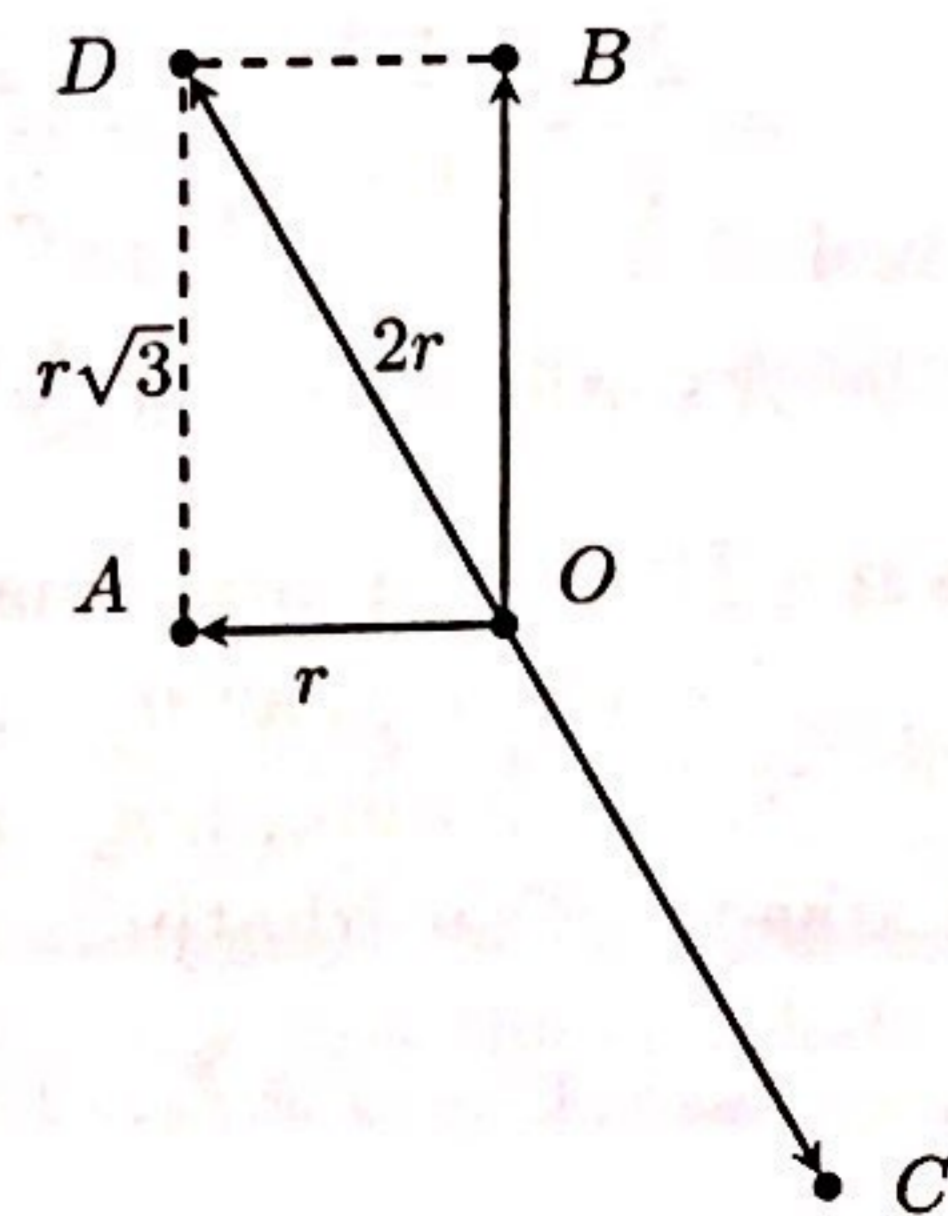
Feltételezzük, hogy igaz $x = n$ esetén, és igazoljuk az $x = n + 1$ esetben. A $3^n > 2^n + n$ egyenlőtlenségből következik, hogy

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3 \cdot 2^n + 3 \cdot n > 2 \cdot 2^n + n + 1 = 2^{n+1} + n + 1,$$

bármilyen $n \geq 2$ természetes szám esetén, vagyis a matematikai indukció elve alapján igazoltuk az egyenlőtlenséget.

3. Jelöljük r -el a z_1, z_2 és z_3 modulusát. Ha $r = 0$, akkor az állítás teljesül, ezért feltehetjük, hogy $r > 0$. Értelmezzük geometriailag, hogy mit jelent a megadott feltétel. Legyen O az origó, A a z_1 képe, B a $\sqrt{3}z_2$ képe és C a $2z_3$ képe. A z_1 és $\sqrt{3}z_2$ esetben szerkesztett $OADB$ paralelogramma D csúcsa a C -nek az O pont szerinti szimmetrikusa. Az OAD háromszög derékszögű, mert $(2r)^2 = (\sqrt{3}r)^2 + r^2$.

Az OAD háromszögben $m(\widehat{DOA}) = 60^\circ$. Ez alapján $m(\widehat{AOC}) = 120^\circ$, tehát $(z_1 + z_3)$ -nak az origó szerinti szimmetrikusa az OB -vel szintén 30° -os szöget zár be.



Emiatt a $z_1 + z_3$ képének O szerinti szimmetrikusa

$$-(z_1 + z_3) = \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \cdot z_2 \text{ vagy } -(z_1 + z_3) = \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \cdot z_2,$$

tehát $-(z_1 + z_3) = z_0 z_2$ vagy $-(z_1 + z_3) = \bar{z}_0 z_2$, ahonnan $(z_1 + z_0 \cdot z_2 + z_3)(z_1 + \bar{z}_0 \cdot z_2 + z_3) = 0$.

Második megoldás

Ha mindhárom komplex szám nulla, akkor az állítás teljesül. Ellenkező esetben feltételezhetjük, hogy $z_1 = 1$ (másként végigoszthatunk z_1 -gyel mindkét kifejezésben) és $|z_2| = |z_3| = 1$. Legyen $z_2 = \cos t + i \sin t$, ahol $t \in [0, 2\pi)$. A megadott feltételből következik, hogy $-2z_3 = z_1 + \sqrt{3}z_2 = 1 + \sqrt{3}(\cos t + i \sin t)$, ahonnan kapjuk, hogy

$$4 = |-2z_3|^2 = |1 + \sqrt{3}(\cos t + i \sin t)|^2 = 1 + 3\cos^2 t + 3\sin^2 t + 2\sqrt{3}\cos t = 4 + 2\sqrt{3}\cos t.$$

$$\text{Tehát } \cos t = 0, \text{ vagyis } t \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

Ekkor az első esetben $z_2 = i$ és $z_3 = \frac{z_1 + \sqrt{3}z_2}{-2} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{-2}$, míg a második esetben

$$z_2 = -i \text{ és } z_3 = \frac{z_1 + \sqrt{3}z_2}{-2} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{-2}.$$

Az első esetben $(z_1 + z_0 z_2 + z_3)(z_1 + \bar{z}_0 z_2 + z_3) =$

$$= \left[1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \cdot i + \frac{1 + \sqrt{3}i}{-2}\right] \left[1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) \cdot i + \frac{1 + \sqrt{3}i}{-2}\right] = 0 \cdot 1 = 0,$$

a második esetben pedig $(z_1 + z_0 z_2 + z_3)(z_1 + \bar{z}_0 z_2 + z_3) =$

$$= \left[1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) (-i) + \frac{1 - \sqrt{3}i}{-2}\right] \left[1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) (-i) + \frac{1 - \sqrt{3}i}{-2}\right] = 1 \cdot 0 = 0.$$

4. Vegyük észre, hogy $(x^2 + 2) + (2x - 1) = (x + 1)^2$, $(x^2 + 2) - 2(2x - 1) = (x - 2)^2$.

Ez alapján $(x^2 + 2) = \frac{2(x + 1)^2 + (x - 2)^2}{3}$, $(2x - 1) = \frac{(x + 1)^2 - (x - 2)^2}{3}$, vagyis

$$f_1(x) = \frac{2(x + 1)^2 + (x - 2)^2}{(x + 1)^2 - (x - 2)^2}.$$

$$\text{Ekkor } f_2(x) = \frac{2(f_1(x) + 1)^2 + (f_1(x) - 2)^2}{(f_1(x) + 1)^2 - (f_1(x) - 2)^2} =$$

$$= \frac{2\left(\frac{2(x + 1)^2 + (x - 2)^2}{(x + 1)^2 - (x - 2)^2} + 1\right)^2 + \left(\frac{2(x + 1)^2 + (x - 2)^2}{(x + 1)^2 - (x - 2)^2} - 2\right)^2}{\left(\frac{2(x + 1)^2 + (x - 2)^2}{(x + 1)^2 - (x - 2)^2} + 1\right)^2 - \left(\frac{2(x + 1)^2 + (x - 2)^2}{(x + 1)^2 - (x - 2)^2} - 2\right)^2} =$$

$$= \frac{2(x + 1)^4 + (x - 2)^4}{(x + 1)^4 - (x - 2)^4}.$$

A sejtésünk az, hogy $f_n(x) = \frac{2(x + 1)^{2^n} + (x - 2)^{2^n}}{(x + 1)^{2^n} - (x - 2)^{2^n}}$ és $f_n(x) \neq \frac{1}{2}$, bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, amit matematikai indukcióval igazolunk.

Az $n = 1$ és az $n = 2$ esetekben a kijelentés igaz.

Feltételezzük, hogy a kijelentés igaz bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, és igazoljuk $(n + 1)$ esetén.

A következőket írhatjuk:

$$f_{n+1}(x) = f \circ f_n(x) = \frac{2(f_n(x) + 1)^2 + (f_n(x) - 2)^2}{(f_n(x) + 1)^2 - (f_n(x) - 2)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \left(\frac{2(x+1)^{2^n} + (x-2)^{2^n}}{(x+1)^{2^n} - (x-2)^{2^n}} + 1 \right)^2 + \left(\frac{2(x+1)^{2^n} + (x-2)^{2^n}}{(x+1)^{2^n} - (x-2)^{2^n}} - 2 \right)^2}{\left(\frac{2(x+1)^{2^n} + (x-2)^{2^n}}{(x+1)^{2^n} - (x-2)^{2^n}} + 1 \right)^2 - \left(\frac{2(x+1)^{2^n} + (x-2)^{2^n}}{(x+1)^{2^n} - (x-2)^{2^n}} - 2 \right)^2} = \\
&= \frac{2(x+1)^{2^{n+1}} + (x-2)^{2^{n+1}}}{(x+1)^{2^{n+1}} - (x-2)^{2^{n+1}}}.
\end{aligned}$$

A fenti összetevés megvalósítható, mert $f_n(x) \neq \frac{1}{2}$, bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ esetén. Valóban, ha létezik $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ úgy, hogy $f_n(x) = \frac{1}{2}$, akkor $\frac{2(x+1)^{2^n} + (x-2)^{2^n}}{(x+1)^{2^n} - (x-2)^{2^n}} = \frac{1}{2}$, ahonnan $(x+1)^{2^n} + (x-2)^{2^n} = 0$, ami lehetetlen.

Ugyanakkor, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, akkor f_{n+1} is értelmezett, mert $(x+1)^{2^{n+1}} \neq (x-2)^{2^{n+1}}$.

ELEMI OSZTÁLYOS TANULÓK RÉSZÉRE KITŪZÖTT FELADATOK*

E: 271. a) Egy számsorozat szomszédos elemei között mindig ugyanannyi a különbség. Írjuk le a következő két sorozat első tíz elemét:

- (1) a 3. elem 19, a 7. elem pedig 47;
- (2) az 5. elem 142, a 8. elem pedig 91.

b) Határozzuk meg az 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5 ... számsorozat első 77 tagjának összegét.

E: 272. Azokat a háromjegyű természetes számokat, amelyeknek középső számjegye egyenlő a két szélső számjegy összegével, *csinos számok*nak nevezzük (például 253). Keressük meg az összes, különböző számjegyekből álló *csinos számot*, amely az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből alkotható.

E: 273. Tamás háromszor annyi idős, mint Anna. Öt év múlva Anna feleannyi idős lesz, mint Tamás. Hány évesek a gyerekek most, illetve öt év múlva? Hány éves lesz Tamás, amikor Anna 18 éves lesz?

*Ezekre a feladatokra minden I-V. osztályos tanuló küldhet megoldásokat, amelyeket 2022. október 20-ig fogadunk el a matlapmegoldasok@yahoo.com címre. Kérjük az összesítőlapra a tanító nevét feltüntetni! A feladatok megoldásához az elemi osztályokban tanult módszereket alkalmazzuk! Nincs szükség a feladatok algebrai megoldására, melyet V-VIII. osztályban tanulnak. Így megoldott feladatokat nem pontozunk! Olvasóink figyelmébe ajánljuk az *Elemi osztályos tanulók számára kitűzött feladatok megoldásai* cikket, lapunk 229. oldalán.